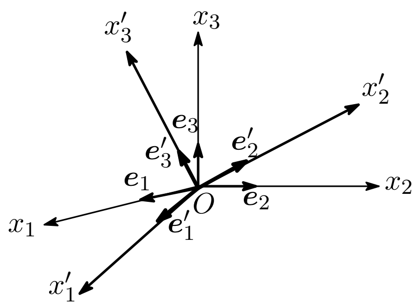
第3話　テンソルを座標変換すると

3.1　座標変換とテンソル

- K氏：さて，第3話に入ったね．ここでは座標変換でテンソルがどのように変換されるのか調べていこう．2つの空間座標系として x_1, x_2, x_3 と x'_1, x'_2, x'_3 を考える．それぞれの座標系の直交基底ベクトルの組を Σ: $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, Σ': $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ としよう．



$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \qquad \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\boldsymbol{e}_j = a_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\boldsymbol{e}'_i = a_{ij}\boldsymbol{e}'_i$$

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \quad a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$$

A：直交行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad {}^tA = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &{}^tAA = I \\ &|A| = \pm 1 \\ &A^{-1} = {}^t A \end{aligned}$$

直交座標変換の計算で必要となる関係式を図中に載せておいたけど，よく知っているものとして特に説明は省くよ．忘れたのなら適当なベクトル解析の本や線形代数の本をザッと眺めておいて欲しい．

- エミリー：座標変換は「推進」「回転」「空間反転」の3つがあるわね．det は行列式を意味するとして，回転の場合，

$$\det A = |A| = 1, \quad a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \tag{3.1.1}$$

が成り立ち，空間反転の場合は $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$ となるので

$$\det A = |A| = -1, \quad a_{ij} = -\delta_{ij} \tag{3.1.2}$$

が成り立つ．直交行列 A の転置行列 ${}^tA$ は逆行列 A^{-1} に等しいのね．

■空間反転では det $A = -1$

- K氏：そうだね．ところで後の話とも関係してくるので，直交変換の空間反転というのを少し復習しておこう．空間反転は右手座標系から左手座標系への変換だね．これは回転のように連続的に変われない不連続な変換だ．通常われわれは右手座標系で考えているわけだが，右があれば左があるわけで，これは互いの基底の向きが真反対という関係にあるんだね．いま空間反転変換で

$\boldsymbol{e}_i$ が $\boldsymbol{e}'_i$ に変換されたとすると

$$\boldsymbol{e}'_i = a_{ij}\boldsymbol{e}_j \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = a_{31}\boldsymbol{e}_1 + a_{32}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

ここで $\boldsymbol{e}'_1 = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_3$ とおいて，上式に入れて整理すると

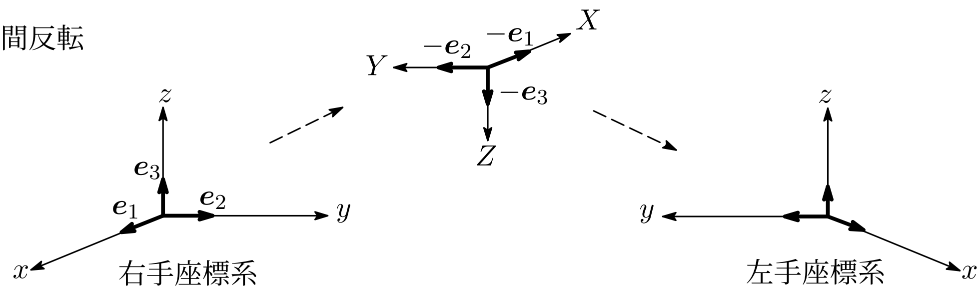
$$\begin{aligned} (a_{11}+1)\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{13}\boldsymbol{e}_3 = 0 \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1 + (a_{22}+1)\boldsymbol{e}_2 + a_{23}\boldsymbol{e}_3 = 0 \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1 + a_{32}\boldsymbol{e}_2 + (a_{33}+1)\boldsymbol{e}_3 = 0 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

基底ベクトルは 1 次独立なので上式より

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1 \tag{3.1.5}$$

で他の係数は 0 となるね．だから，反転では $\det A = -1$ となるわけだ．$\det A$ の符号を調べれば

空間反転



空間反転かどうか分かるわけだ．さて，テンソルの座標変換の話に入ろう．

3.1.1 テンソルの座標変換

- K 氏：基底 Σ と Σ' に関する 2 階テンソル T の成分は (2.1.2) より

$$T_{ij} = T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j), \quad T'_{ij} = T(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) \tag{3.1.6}$$

と表される．直交基底の変換則 $\boldsymbol{e}'_i = a_{ik}\boldsymbol{e}_k$ を使うと (3.1.6) の第 2 式は T の双線形性 (2.1.3),(2.1.4) より

$$T'_{ij} = T(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = T(a_{ik}\boldsymbol{e}_k, a_{j\ell}\boldsymbol{e}_\ell) = a_{ik}a_{j\ell}T(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_\ell) = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \tag{3.1.7}$$

となって 2 階テンソルの求める座標変換変換公式

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \tag{3.1.8}$$

が得られる．ついでといったらナンだけど，$T_{k\ell} = \delta_{k\ell}$ と置いてやると

$$T_{ij'} = a_{ik}a_{j\ell}\delta_{k\ell} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \tag{3.1.9}$$

となるだろう．クロネッカーの δ はどの直角座標系においても単位行列の成分をもつ 2 階テンソルということだね．さて，話を元に戻して，いま，ベクトル u_i, v_i をそれぞれベクトルの成分と

するとき，$u_i v_j\,(i,j=1,2,3)$ は 2 階テンソルの成分であることを示しておこう．ベクトルの座標変換により

$$
\begin{aligned}
u'_i &= a_{jk} u_k, \quad v'_j = a_{j\ell} v_\ell \\
\therefore \quad u'_i v'_j &= a_{ik} u_k a_{j\ell} u_\ell = a_{ik} a_{j\ell} u_k v_\ell
\end{aligned}
\tag{3.1.10}
$$

となる．ここで $T'_{ij} = u'_i v'_j$ とおくと (3.1.13) は

$$
T'_{ij} = a_{ik} a_{j\ell} T_{k\ell}
\tag{3.1.11}
$$

となるので，$u_i v_j\,(i,j=1,2,3)$ は 2 階テンソルの成分ということになる。

さて、3 階テンソルの座標変換公式は 2 階テンソルの場合とまったく同様にして

$$
T'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} T_{\ell mn}
\tag{3.1.12}
$$

となる．いま，ベクトル u_i, v_i, w_i をそれぞれベクトルの成分とするとき，$u_i v_j w_k\,(i,j,k=1,2,3)$ は 3 階テンソルの成分であることを示しておこう．ベクトルの座標変換により

$$
\begin{aligned}
u'_i &= a_{i\ell} u_\ell, \quad v'_j = a_{jm} v_m, \quad w' = a_{kn} w'_n \\
\therefore \quad u'_i v'_j w'_k &= a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} u_\ell v_m w_n
\end{aligned}
\tag{3.1.13}
$$

となる．ここで $T'_{ijk} = u'_i v'_j w'_k$ とおくと (3.1.13) は

$$
T'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} T_{\ell mn}
\tag{3.1.14}
$$

となるので，$u_i v_j w_k\,(i,j,k=1,2,3)$ は 3 階テンソルの成分ということになる。ところで，左右の辺の添え字の並びを見るとキチンと規則だって並んでいることが分かるだろう．

■テンソルの座標変換公式

- このことを利用すれば高階テンソルの座標変換公式は即座に求めることができる！ 例えば 4 階テンソルなら次の通りだ．

$$
T'_{ijk\ell} = a_{ip} a_{jr} a_{ks} a_{\ell t} T_{prst}
\tag{3.1.15}
$$

  添え字の並び方を図示すると 3 階テンソルの場合次の通りだね．

$$
T'_{ijk} = a_{i\ \ell}\, a_{j\ m} a_{k\ n} T_{\ell\, m\, n}
$$

- エミリー：ナルホドねぇ〜，テンソルの座標変換といっても恐くわないわね！

- K氏：そうだね，公式として覚えておけばいいと思う．このような変換則によって，テンソルの 1 つの直交基底に関する成分が分かれば，他の任意の直交基底に関する成分も即座に求めることができるようになる．

■対称性・反対称性は座標変換に依存しない

- ところで，テンソルには対称テンソルと反対称テンソルの 2 種類があったけど，これらの対称性は座標変換には無関係なテンソルの性質であることを示しておこう．テンソルが Σ 系で対称であったとする．Σ' 系での成分を T'_{ij} とすると

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{j\ell} T_{k\ell} \tag{3.1.16}$$

$T_{k\ell} = T_{\ell k}$ なので，上式は

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{j\ell} T_{\ell k} = a_{j\ell} a_{ik} T_{\ell k} = T'_{jk} \tag{3.1.17}$$

となって，対称性は座標変換で不変ということが分かる．次に反対称性だが，同様にして

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{j\ell} T_{k\ell} = -a_{ik} a_{j\ell} T_{\ell k} = -a_{j\ell} a_{ik} T_{\ell k} = -T'_{jk} \tag{3.1.18}$$

となって，反対称性は座標変換で不変だね.

■テンソルの基底を使った変換公式

- さて，変換則の公式を違う視点から導出してみよう．2 階テンソルは (2.2.15) に示したように直交基底 Σ:$\boldsymbol{e}_i$ あるいは $\Sigma' : \boldsymbol{e}'_i$ を使って

$$T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j, \quad T'_{ij} \boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \tag{3.1.19}$$

と表せた．ところで (3.1.8) と基底の座標変換の公式を使うと

$$T'_{ij} \boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j = a_{ik} a_{j\ell} T_{k\ell} \boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j = T_{k\ell} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_\ell \quad (\because \boldsymbol{e}_k = a_{ik} \boldsymbol{e}'_i,\ \boldsymbol{e}_\ell = a_{j\ell} \boldsymbol{e}'_j) \tag{3.1.20}$$

となるね．これは (3.1.19) で定義される 2 つのテンソル量は直交基底の取り方に無関係ということになる．つまり

$$T = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = T'_{ij} \boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \tag{3.1.21}$$

だね．(3.1.20) より

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{j\ell} T_{k\ell} \tag{3.1.22}$$

が得られるだろ．これは (3.1.8) と同じ公式だ．繰り返さないけど，高階テンソルの場合もまったく同様にできるね．ところで，物理のテキストなんかでは通常，座標変換でこのように変換されるものをテンソルと定義されている．

- エミリー：第 1 話や第 2 話ではテンソルをベクトル変数について線形性をもつ関数として捉えてきたけど，直交基底の変換で決められた変換則に従う実数の組をテンソルとして捉えるというのね．え〜っと，ここらで座標変換の公式をまとめておくと，アインシュタインの規約を使えば次のようになるわね.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{直交基底の変換公式} & \boldsymbol{e}'_i = a_{ij} \boldsymbol{e}_j \longleftrightarrow \boldsymbol{e}_j = a_{ij} \boldsymbol{e}'_i \\ \text{ベクトルの変換公式} & v'_i = a_{ij} v_j \longleftrightarrow v_j = a_{ij} v'_i, \quad \text{ただし } \boldsymbol{v}(v_1, v_2, v_3) \\ \text{2 階テンソルの変換公式} & T'_{ij} = a_{ik} a_{j\ell} T_{k\ell} \longleftrightarrow T_{k\ell} = a_{ik} a_{j\ell} T'_{ij} \\ \text{3 階テンソルの変換公式} & T'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} T_{\ell mn} \longleftrightarrow T_{\ell mn} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} T'_{ijk} \end{array} \right. \tag{3.1.23}$$

■テンソルとベクトルの積など

- K氏：OK！それじゃエミリー，このセクションの最後に次の 2 つの計算をやってみるかい．これらはいずれも添え字の付き方に留意しておくといいね．

  (1) 3 階テンソル T_{ijk} とベクトル u_k の積は 2 階テンソル U_{ij} になる

$$U_{ij} = T_{ijk} u_k \tag{3.1.24}$$

  (2) 3 階テンソル T_{ijk} と 2 階テンソル S_{ij} の積はベクトル u_i になる

$$u_i = T_{ijk} S_{jk} \tag{3.1.25}$$

- エミリー：まず 1 番目は，Σ' 系で

$$U'_{ij} = T'_{ijk} u'_k$$

  が成立する．3 階テンソルとベクトルは次のように変換される．

$$T'_{ijk} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} T_{pqr}, \quad u'_k = a_{k\ell} u_\ell$$

  これを上式に入れて整理すると

$$U'_{ij} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{k\ell} T_{pqr} u_\ell = a_{ip} a_{jq} \delta_{r\ell} T_{pqr} u_\ell = a_{ip} a_{jq} T_{pq\ell} u_\ell$$

  ところで $T_{pq\ell} u_\ell = U_{pq}$ なので

$$U'_{ij} = a_{ip} a_{jq} U_{pq}$$

  となる．これは 2 階テンソルの変換式，つまり U_{ij} は 2 階テンソルということになるわね．
  次に 2 番目は，同様にして

$$\begin{aligned} &T'_{ijk} = a_{ip} a_{iq} a_{kr} T_{pqr}, \quad S'_{jk} = a_{jt} a_{ku} S_{tu} \\ &T'_{ijk} S'_{jk} = a_{ip} a_{jq} a_{jt} a_{kr} a_{ku} T_{pqr} S_{tu} = a_{ip} \delta_{qt} \delta_{ru} T_{pqr} S_{tu} = a_{ip} T_{ptr} S_{tr} = a_{ip} u_p \end{aligned}$$

  これはベクトルの変換式．つまり u_i はベクトルということね．

- K氏：そうだね．A, B, S はいずれも添え字の数の階数のテンソルとして，一般に次の関係式が成立するんだ．これは時間のあるときにでもチェックすればいいと思う．ただ，両辺を見比べていると，添え字の種類と付き方にルールのようなものがあることが分かるだろ．

$$\begin{cases} \text{1 階テンソル} & B_i = S_{ijk} A_{jk} \\ \text{（ベクトル）} & B_i = S_{ijk} u_j v_k \\ \text{2 階テンソル} & B_{ik} = S_{ij} A_{jk} \\ & B_{ij} = S_{ijk} A_k \\ & B_{k\ell} = S_{ijk\ell} A_{ij} \\ \text{3 階テンソル} & B_{ijk} = S_{ij} A_k \end{cases} \tag{3.1.26}$$

- エミリー：そうね，右辺の添え字で同じものを消すと，残った添え字は左辺の添え字になっているわね．つまり，B は残った添え字の数の階数テンソルというわけね．

- K氏：そういうことだね．このことは先の話になるけど，§5.4「商の法則」のところで再度触れる予定だ．

- エミリー：そうなの，楽しみね．

3.1.2　縮約

- K氏：さて，テンソルの縮約について話を進めよう．2階テンソルの変換

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \tag{3.1.27}$$

で，$i=j$ として i について和を作ると

$$T'_{ii} = a_{ik}a_{i\ell}T_{k\ell} \tag{3.1.28}$$

となる．ところで a_{ij} は直交行列だから $a_{ik}a_{i\ell} = \delta_{k\ell}$ となるね．だから

$$T'_{ii} = \delta_{k\ell}T_{k\ell} = T_{ii} \quad (T_{ii} = \sum_{i=1}^{3} T_{ii}\text{：念のため}) \tag{3.1.29}$$

となって，これは座標変換に対して変化しない，つまりスカラーになる．トレースは座標変換で不変ということだね．T_{ii} を作ることを T_{ij} を縮約するというんだ．

$$tr(T) = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{3.1.30}$$

- エミリー：ベクトルの場合，$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ の内積，つまり同じ成分同士の積を加え合わせることでスカラーを作ったわね．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{3.1.31}$$

$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ のテンソル積はダイアドと呼ばれる2階テンソルだった．

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} = \boldsymbol{ab} = (a_ib_j) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}, \quad T_{ij} = a_ib_j \tag{3.1.32}$$

この2階テンソルを $i=j$ として縮約すると $a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ となってスカラーを得る．つまり縮約というのは，ベクトルの内積でスカラーを作ったように，2階テンソルからスカラーを作るための操作ということかしら．

- K氏：そうだね，2階テンソルに関してはそういうことになるね．ただ，テンソルの場合，ベクトルと違って高階テンソルというものが存在するだろう．例えば3階テンソルなら添え字が i,j,k と3個ある．このような場合，相等しいとおく添え字の組み合わせ，具体的には

$$\begin{cases} i=j \quad \longrightarrow \quad T_{iik} = T_{11k} + T_{22k} + T_{33k} \quad (T_{111}, T_{221}, T_{331}\text{の 3 成分}) \\ i=k \quad \longrightarrow \quad T_{iji} = T_{1j1} + T_{2j2} + T_{3j3} \quad (T_{111}, T_{222}, T_{323}\text{の 3 成分}) \\ j=k \quad \longrightarrow \quad T_{ijj} = T_{i11} + T_{i22} + T_{i33} \quad (T_{111}, T_{122}, T_{133}\text{の 3 成分}) \end{cases} \tag{3.1.33}$$

の3通りがあるわけで，それぞれの組み合わせによる縮約を考えるんだね．

- エミリー：そうするとどうなるのかしら？

■縮約によりテンソルの階数は 2 階減る

- K氏：うん．そうするとテンソルの階数が 2 階減ってベクトルになるんだ．先ほど書いたように 3 階テンソルを縮約すると成分が 9 成分からベクトル成分の数と同じ 3 成分になっただろう．このことを座標変換の観点から調べてみよう．3 階テンソルの変換公式より

$$T'_{ijk} = a_{i\ell}a_{jm}a_{kn}T_{\ell mn} \tag{3.1.34}$$

いま，$j = k$ として j について和をとる，つまり j, k で縮約すると，直交行列 a_{ij} の性質を使って

$$T'_{ijj} = a_{i\ell}a_{jm}a_{jn}T_{\ell mn} = a_{i\ell}(a_{jm}a_{jn})T_{\ell mn} = a_{i\ell}\delta_{mn}T_{\ell mn} = a_{i\ell}T_{\ell mm} \tag{3.1.35}$$

となるね．ここで次の置き換えをしてやる．

$$v_i = T_{ijj}\ (= T_{i11} + T_{i22} + T_{i33}) \tag{3.1.36}$$

そうすると (3.1.35) は

$$v'_i = T'_{ijj} = a_{i\ell}v_\ell \qquad (v_\ell = T_{\ell mm}) \tag{3.1.37}$$

となるね．これはとりもなおさずベクトルの変換則だ．ということで，3 階テンソルを縮約するとベクトル（1 階のテンソル）になるということが分かる．同様にして，添え字の組み合わせを変えた $u_i = T_{ijj}$, $v_j = T_{iji}$, $w_k = T_{iik}$ はそれぞれベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の成分となることが分かってもらえると思う．

$$u_i = T_{ijj} \left\{ \begin{array}{l} u_1 = T_{1jj} = T_{111} + T_{122} + T_{133} \\ u_2 = T_{2jj} = T_{211} + T_{222} + T_{233} \\ u_3 = T_{3jj} = T_{311} + T_{322} + T_{333} \end{array} \right. , \quad v_j = T_{iji} \left\{ (\text{略}) \right. , \quad w_k = T_{iik} \left\{ (\text{略}) \right.$$

ついでに 4 階テンソル $T_{ijk\ell}$ の縮約を見てみよう．一つのケースとして $k = \ell$ とし，k について和をとると

$$T'_{ijkk} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ks}T_{pqrs} = a_{ip}a_{jq}\delta_{rs}T_{pqrs} = a_{ip}a_{jq}T_{pqrr} \tag{3.1.38}$$

(3.1.38) の右辺は 2 階テンソル T_{ij} の変換則になっている．つまり，

$$\mathtt{T}'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\mathtt{T}_{pq} \tag{3.1.39}$$

だね．だから 4 階テンソルを縮約すると 2 階テンソルになるというわけだ．

- エミリー：縮約によってテンソルの階数は 2 階分減る，これを一般化すれば p 階（$p \geq 2$）テンソルを縮約すると $p-2$ 階のテンソルが得られるということね．
- K氏：そうなんだ．ただし，縮約の際，どの添え字について縮約したかは明示しないといけない．
- エミリー：え〜っと，縮約のお話を終わる前に具体的な事例をあげていただける．
- K氏：そうだね，内容の詳しい説明は省いて，縮約操作のイメージ的なものを掴んでもらうという意味で，等方性弾性体の応力テンソルの事例を紹介しよう．応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \qquad (i, j, k, \ell = 1, 2, 3) \tag{3.1.40}$$

で与えられる．これは応力-歪方程式といわれるね．C_{ijkl} は弾性テンソルで物質に固有な 4 階テンソルで，ε_{ij} は歪テンソルと呼ばれる 2 階対称テンソル．弾性テンソルは

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{3.1.41}$$

で与えられ，等方性弾性体の弾性テンソルは対称テンソルとなる．μ, λ はラメの弾性定数と呼ばれる定数．この式を先ほどの式に入れると

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \mu(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk})\varepsilon_{k\ell} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{k\ell} \\ &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\delta_{k\ell}\varepsilon_{k\ell} \\ &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{pp}\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

が得られる．右辺の ε_{pp} は歪テンソルの対角和だね．さて，ここで縮約の登場だ．両辺を i と j で縮約すると

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 3\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \tag{3.1.43}$$

アインシュタインの既約を使って書けば

$$\begin{aligned}&\sigma_{pp} = 2\mu\varepsilon_{pp} + 3\lambda\varepsilon_{pp} = (2\mu + 3\lambda)\varepsilon_{pp} \\ \therefore \quad &\varepsilon_{pp} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{pp}\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

これで歪テンソルと応力テンソルの対角成分和（トレース）の関係が得られた．次にこの式を (3.1.42) に入れると

$$\begin{aligned}&\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{pp}\delta_{ij} \\ \therefore \quad &\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\sigma_{pp}\delta_{ij}\end{aligned} \tag{3.1.45}$$

を得る．等方性弾性体の歪，応力テンソル成分の表式だ．ということで縮約することでうまく物理量をひっぱり出すことができたというか，そういういうものが感じられたのではと思うけどいかがかな... ？

- エミリー：そうね，例えば 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ があって，ベクトルの交差角を知りたいときは内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ をとるわね．テンソルの縮約もテンソル成分の汲みだし方をうまくやって必要な物理量を引き出してくるといったような感じね．

- K 氏：うん，マッ，人によって感じ方はいろいろだと思うので，この話はここらで切り上げて，以前登場したレビ・チビタ記号の次の関係式を証明しておこう．なぜここでやるのかという理由は縮約を使うからなんだ．この関係式はレビ・チビタ記号の積の縮約公式ともいわれる．証明方法はいろいろあるようだけど，ここでは簡易な方法でやる．公式 (3.1.46) はいろいろとよく使われるね．

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell} \tag{3.1.46}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = 2\delta_{k\ell} \tag{3.1.47}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \tag{3.1.48}$$

(1) j と k が等しい場合 (3.1.46) の左辺は 0．一方右辺は 0 となることは明らかだね．従って等式は成立する．次に $j \neq k$ のときは，例えば $j = 2,\, k = 3$ とすると，(3.1.46) の左辺は

$$\varepsilon_{i23}\varepsilon_{i\ell m} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{1\ell m} = \begin{cases} 1 & (\ell = 2,\, m = 3) \\ -1 & (\ell = 3,\, m = 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となり，一方右辺も同じ値をとるので等式が成立する．j, k を他の値にとっても同様となるので，(3.1.46) は成立する．

(2) (3.1.46) で j と ℓ について縮約すると，これは $j=\ell$ として和を作ることだが

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm}=\delta_{jj}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kj}=3\delta_{km}-\delta_{km}=2\delta_{km}$$

(3) さらに続けて k と m について縮約すると

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\delta_{kk}=2\cdot 3=6$$

となり，これは公式 (3.1.48) だね．

さて，ε_{ijk} の記号を使うと 2 階テンソルで次のような関係式が成立することがわかる．

A) 2 階対称テンソルは次式を満たす．

$$\varepsilon_{ijk}T_{jk}=0 \tag{3.1.49}$$

$\because$ $u_i=\varepsilon_{ijk}T_{ji}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
u_1&=\varepsilon_{123}T_{23}+\varepsilon_{132}T_{32}=T_{23}-T_{32}=0 &&\longrightarrow T_{23}=T_{32}\\
u_2&=\varepsilon_{213}T_{13}+\varepsilon_{231}T_{31}=-T_{13}+T_{31}=0 &&\longrightarrow T_{13}=T_{31}\\
u_3&=\varepsilon_{312}T_{12}+\varepsilon_{321}T_{21}=T_{12}-T_{21}=0 &&\longrightarrow T_{12}=T_{21}
\end{aligned}$$

B) 2 階テンソル T_{ij} について次式が成立する．

$$\varepsilon_{ijk}T_{i\ell}T_{jm}T_{kn}=\varepsilon_{\ell mn}\det(T),\quad \det(T)=|T_{ij}| \tag{3.1.50}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mn}T_{i\ell}T_{jm}T_{kn}=6\det(T) \tag{3.1.51}$$

$\because$ (3.1.50)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}T_{i\ell}T_{jm}T_{kn}&=T_{1\ell}T_{2m}T_{3n}+T_{1m}T_{2n}T_{3\ell}+T_{1n}T_{2\ell}T_{3m}\\
&\quad-T_{1n}T_{2m}T_{3\ell}-T_{1m}T_{2\ell}T_{3n}-T_{1\ell}T_{2n}T_{3m}\\
&=\begin{vmatrix} T_{1\ell} & T_{1m} & T_{1n}\\ T_{2\ell} & T_{2m} & T_{2n}\\ T_{3\ell} & T_{3m} & T_{3n}\end{vmatrix}=\varepsilon_{\ell mn}\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{vmatrix}\\
&=\varepsilon_{\ell mn}\det(T)
\end{aligned}$$

$\because$ (3.1.51)　(3.1.50) と (3.1.48) を使うと

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mn}T_{i\ell}T_{jm}T_{kn}=\varepsilon_{\ell mn}\varepsilon_{\ell mn}\det(T)=6\det(T) \tag{3.1.52}$$

- エミリー：(3.1.50) の証明でわざわざ $\varepsilon_{ijk}T_{i\ell}T_{jm}T_{kn}$ を和に分解しているけど，ベクトル 3 重積のところででてくる

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k \tag{3.1.53}$$

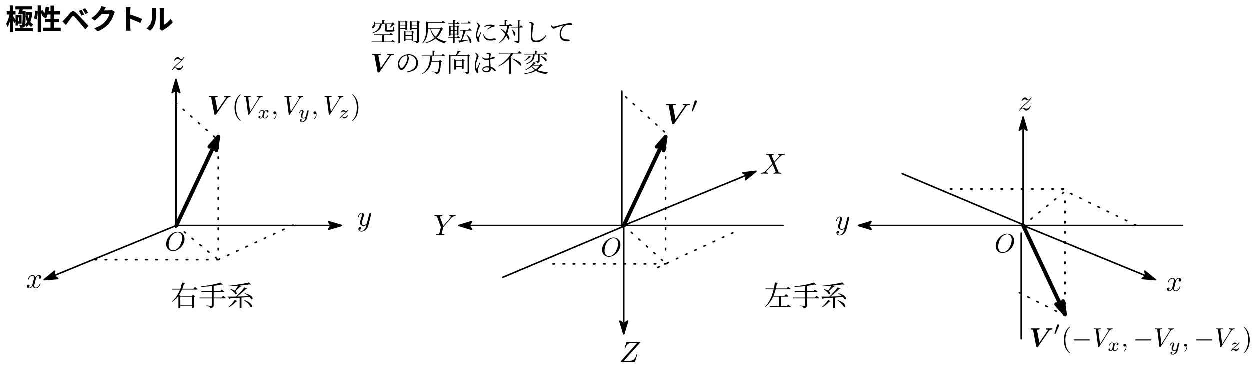
という公式を使えば一発じゃないの．

- K 氏：うん，そうなんだけど，ここはできるだけ泥臭く迫ってみようと思ったんだ．

3.1.3　軸性テンソル（擬テンソル）

極性ベクトルと軸性ベクトル

- K氏：軸性テンソルの話に入る前にベクトルの復習としてしておこう．ご存知のようにベクトルには極性ベクトルと軸性ベクトルの 2 種類がある[1]．粒子の位置ベクトルや速度，加速度，力などの普通のベクトルは極性ベクトルと呼ばれ，これらのベクトルは初めから方向を持っているね．いま，x, y, z 軸をすべて反対向きにする空間反転を考えよう．粒子の位置座標や速度，加速度，力など極性ベクトルの成分を (V_x, V_y, V_z) とおくと，もともとのベクトルの方向は変わらないので空間反転で各成分の符号は反転し $(-V_x, -V_y, -V_z)$ と変換される．座標系というのはあくまで観測者の視点の設定ということだね．



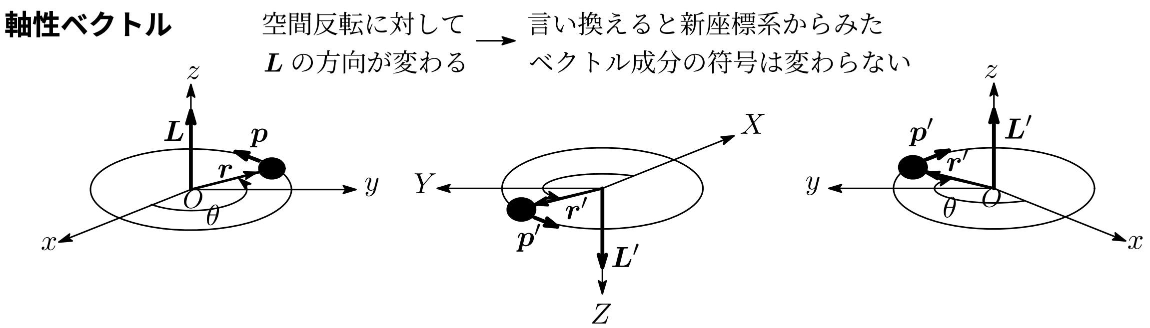
一方，空間反転により方向を変えるベクトルがある．これを軸性ベクトルと呼んでいるん．具体的な例としては次のようなものがある．

$$\begin{cases} \text{角速度ベクトル} (\boldsymbol{\omega}) & : \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \\ \text{角運動量ベクトル} (\boldsymbol{L}) & : \ \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \\ \text{磁場ベクトル} & : \ \dot{\boldsymbol{B}} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \\ \quad \vdots & \end{cases} \tag{3.1.54}$$

角運動量ベクトルを取り上げよう．繰り返しになるが

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{3.1.55}$$

で定義される．いうまでもないことだが $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルで $\boldsymbol{p}$ は運動量ベクトルだ．



[1] 1896 年，フォークト (Woldemar Voigt, 1850.9.2-1919.12.13：ドイツの物理学者）によりこれら 2 種類のベクトルに区分された．

$\boldsymbol{r}$ や $\boldsymbol{p}$ は極性ベクトルだから，空間反転によって $\boldsymbol{r}(r_i, r_j, r_k) \to \boldsymbol{r}'(-r_i, -r_j, -r_k)$, $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}'(-p_i, -p_j, -p_k)$ と変換される．空間反転後の角運動量ベクトルを $\boldsymbol{L}'$ とするとその i 成分は

$$L'_i = \varepsilon_{ijk}(-r_j)(-p_k) = \varepsilon_{ijk} r_j p_k = L_i \tag{3.1.56}$$

となって，成分の符号は変わらない．言い換えると，空間反転で $\boldsymbol{L}$ は方向を変えているということだ．軸性ベクトルは擬ベクトルとも呼ばれる．軸性ベクトルの方向は回転軸の方向になっているんだね．A を直交変換行列とすると，一般に軸性ベクトルは

$$v'_i = |A|\, a_{ij} v_j \begin{cases} \text{平行，回転} & : \quad |A| = 1 \\ \text{空間反転} & : \quad |A| = -1 \end{cases} \tag{3.1.57}$$

という変換を受ける[2].

- エミリー：軸性ベクトルというネーミングはベクトルの方向が回転軸の方向になっているということでナルホドと思うけど，どうして擬ベクトルという名前もあるのかしら.

- K氏：そうだね．極性ベクトルも軸性ベクトルも平行移動や回転などの座標変換に対しては同様に振舞うので，コレだけからはどちらのベクトルか区別できない．しかし空間反転をしてやると極性ベクトルの成分は符号が反転するけど，軸性ベクトルはそこでボロをだすというか成分の符号は変わらない．つまりベクトルのフリをしているけど，本来のベクトルではない．”擬”というのは『本物らしく似せる』という意味があるから，このベクトルの接頭語に”擬”が付いたんだろうね.

- エミリー：英語で *pseudo vector* というのね．ナルホド...

軸性テンソル（擬テンソル）

- K氏：ベクトルはテンソルの一種だからテンソルにも軸性テンソルというのが考えられる．ベクトルの場合と同様，空間反転でテンソル成分の符号が変わらないテンソルのことで，擬テンソルとも呼ばれる．具体的な例としては，いままで何度もでてきたレビ・チビタの記号 ε_{ijk} がそれにあたる．これは第 2 話の § 4.3 交代積のところで 3 階完全反対称テンソルとしての具体的な成分表示をしたね.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i,j,k\text{：偶置換} \\ -1 & i,j,k\text{：奇置換} \\ \ \ 0 & i,j,k\text{ のうちに等しいものがある} \end{cases} \tag{3.1.58}$$

忘れていればもう一度見直して欲しい．さて，直交変換行列の行列式 $|A|$ はレビ・チビタの記号を使えば

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1\ell} a_{2m} a_{3n} \varepsilon_{\ell mn} \tag{3.1.59}$$

と書ける．これはいいだろう.

- エミリー：そうね，手間を惜しまずに右辺の項のすべて書くと，$\varepsilon_{\ell mn}$ の符号に注意して

$$\begin{aligned} a_{1\ell} a_{2m} a_{3n} \varepsilon_{\ell mn} = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

[2] 行列式の値 $|A|$ はスカラーだが，空間反転で符号が変わるスカラーを擬スカラーと呼んでいる.

これは $|A|$ の値ね.

- K氏：うん．さて，行を奇数回置換すると -1 が掛かり，偶数回の置換では符号は変化しないという行列式の性質を思いだしながら (3.1.59) を眺めて欲しい．例えば 1 行目と 2 行目を入れ替えると
$$a_{2\ell}a_{1m}a_{3n}\varepsilon_{\ell mn} = |A|\,\varepsilon_{213} = -\,|A| \tag{3.1.60}$$
となるだろう．これを一般化して書くと
$$|A|\,\varepsilon_{ijk} = a_{i\ell}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{\ell mn} \tag{3.1.61}$$
と書ける．これは 3 階テンソル ε_{ijk} の座標変換公式だ．ただ頭に $|A|$ がかかっている点に注目．これは次のように書いたほうがベクトルのケースと対比しやすいね.
$$\varepsilon_{ijk} = |A|\,a_{i\ell}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{\ell mn} \begin{cases} \text{平行，回転} & : \quad |A| = 1 \\ \text{空間反転} & : \quad |A| = -1 \end{cases} \tag{3.1.62}$$

- エミリー：え〜っと，軸性ベクトルや軸性テンソルの変換公式を整理すると ...
$$\begin{cases} \text{軸性ベクトル} \quad v'_i = |A|\,a_{ij}v_j \\ \text{軸性テンソル} \quad T'_{ij} = |A|\,a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell}, \quad T'_{ijk} = |A|\,a_{i\ell}a_{jm}a_{kn}T_{\ell mn}, \quad . \end{cases} \tag{3.1.63}$$
極性ベクトルや普通のテンソルでは $|A|$ の係数は付かなかったのね.

■ 2 階反対称テンソルと軸性ベクトル

- K氏：さて，任意の 2 階反対称テンソル A_{ij} に対して
$$v_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk} \tag{3.1.64}$$
という量を考えよう．$A_{ij} = -A_{ji}$ であることに注意して成分表記すると
$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{1jk}A_{jk} = \dfrac{1}{2}(A_{23} - A_{32}) = A_{23} \\ v_2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{2jk}A_{jk} = \dfrac{1}{2}(A_{31} - A_{13}) = A_{31} \\ v_3 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{3jk}A_{jk} = \dfrac{1}{2}(A_{12} - A_{21}) = A_{12} \end{cases} \tag{3.1.65}$$
v_i をベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分とすれば，$\boldsymbol{v}$ の成分は 2 階反対称テンソルの 3 個の独立成分 A_{12}, A_{23}, A_{31} に対応していることになる．ベクトル $\boldsymbol{v}$ は (3.1.62), (3.1.64) から軸性ベクトルだね．このベクトル $\boldsymbol{v}$ を反対称テンソル A_{ij} に対応するとか付随する軸性ベクトルといっている．また，逆に
$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk}v_k \tag{3.1.66}$$
が成り立つことを見ておこう．これは公式 (3.1.46) を使えばすぐ分かる.
$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}v_k &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m}A_{\ell m} = \frac{1}{2}(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell})A_{\ell m} \\ &= \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ij}) = A_{ij} \end{aligned} \tag{3.1.67}$$
2 階反対称テンソル A_{ij} を軸性ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対応するテンソルといっている.

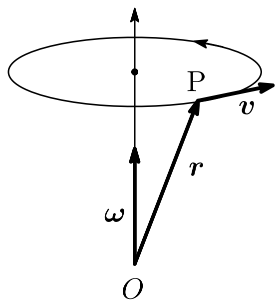
- エミリー：いまお話されたベクトルとそれに対応するテンソルの具体的な例をあげていただけるかしら．

- K氏：そうだね，具体例がないとサッパリ面白くないよね．そこで軸性ベクトルの代表的なものとして角速度ベクトルを取りあげてみよう．角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{3.1.68}$$

$\boldsymbol{v}$ は P 点における速度ベクトルだ．(3.1.68) を成分表記すれば

$$v_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k \begin{cases} v_1 = \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ v_2 = \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ v_3 = \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{cases} \tag{3.1.69}$$



角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に対応する 2 階反対称テンソルを Ω_{ij} とすると (3.1.66) より

$$(\Omega_{ij}) = \varepsilon_{ijk}\omega_k = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.70}$$

を得る．この 2 階反対称テンソル Ω を角速度テンソルという．角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の成分と角速度テンソル Ω の成分の関係は

$$\omega_1 = \Omega_{23}, \quad \omega_2 = \Omega_{31}, \quad \omega_3 = \Omega_{12} \tag{3.1.71}$$

だね．角速度テンソルを使えば (3.1.69) は

$$\begin{gathered} v_i = -\Omega_{ij}x_j \longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \therefore \quad \boldsymbol{v} = -\Omega \boldsymbol{r} \end{gathered} \tag{3.1.72}$$

と線形変換の形で表せる．

　次に角運動量ベクトルについて考えてみよう．角運動量を $\boldsymbol{L}$ とするとベクトル解析の公式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を使って

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= m\{(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\} \longrightarrow \begin{cases} L_x = m\{(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\omega_x - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})r_x\} \\ L_y = m\{(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\omega_y - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})r_y\} \\ L_z = m\{(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\omega_z - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})r_z\} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1.73}$$

と展開できる．ここで添え字 x, y, z を $1, 2, 3$ に，r_x, r_y, r_z をそれぞれ x_1, x_2, x_3 に書き換えると

$$L_i = m\{(x_k x_k)\omega_i - (x_j\omega_j)x_i\} \tag{3.1.74}$$

となる．各項は同じ添え字があるので，例のアインシュタインの規則だね，具体的に書けば

$$L_i = m\{(x_k x_k)\omega_i - (x_j\omega_j)x_i\} = m\{(x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3)\omega_i - (x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3)x_i\}$$

ということだ．(3.1.74) をもう少し変形してやると

$$L_i = m\{(x_k x_k)\delta_{ij} - x_i x_j\}\omega_j \tag{3.1.75}$$

と表すことができる．クロネッカーの δ_{ij} をうまく使っている．そこで

$$J_{ij} = m\{(x_k x_k)\delta_{ij} - x_i x_j\} \tag{3.1.76}$$

と置くと，δ_{ij} は 2 階単位テンソル $\boldsymbol{I}$ の成分，$x_i x_j$ の項はベクトルのテンソル積 $\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r}$ で $J_{ij} = J_{ji}$ だから，J_{ij} は 2 階対称テンソルの成分ということになるね．(3.1.74) は

$$L_i = J_{ij}\omega_j \tag{3.1.77}$$

と書ける．2 階対称テンソルを J とすれば (3.1.76) は

$$J = m(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r} \tag{3.1.78}$$

と表すことができるので，

$$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega} \tag{3.1.79}$$

という線形変換の形に書くことができる．J を慣性テンソルと呼んでいる．

- エミリー：角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は慣性テンソル J によっては角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ に変換されるというわけね．慣性テンソルの成分を具体的に書き出すと

$$J_{11} = m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_1) = m(x_2^2 + x_3^2), \quad J_{22} = m(x_3^2 + x_1^2), \quad J_{33} = m(x_1^2 + x_2^2)$$
$$J_{12} = J_{21} = -mx_1x_2, \quad J_{23} = J_{32} = -mx_2x_3, \quad J_{13} = J_{31} = -mx_1x_3$$

となって，力学のテキストでお目にかかる成分がでてくるわね．

- K氏：そうだね．慣性テンソルの対角要素 J_{11}, J_{22}, J_{33} を慣性モーメント，非対角要素 J_{12}, J_{23}, J_{31} を慣性乗積と呼んでいる．慣性テンソルの物理的内容については適当な力学のテキストを参照して頂戴．角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は軸性ベクトルなので，これに対応する 2 階反対称テンソルが存在するね．このテンソルを角運動量テンソルと呼んでいる．角運動量テンソルを $H = (H_{jk})$ とすると (3.1.66) より

$$H_{jk} = \varepsilon_{jki}L_i = \varepsilon_{ijk}L_i \tag{3.1.80}$$

と表せる．また，(2.3.15) を使えば角運動量ベクトルの i 成分は

$$L_i = m\varepsilon_{i\ell m}x_\ell v_m$$

と書けるので，これを (3.1.80) に入れ，公式 (3.1.46) を使えばテンソル H の成分は

$$H_{jk} = m\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i\ell m}x_\ell v_m = m(\delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell})x_\ell v_m = m(x_j v_k - x_k v_j) \tag{3.1.81}$$

と求まる．したがって求める角運動量テンソルはテンソル積を使って表せば

$$H = m(\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{r}) \tag{3.1.82}$$

となる．また，(3.1.81) に (3.1.72) の $v_i = -\Omega_{ij}x_j$ を入れると $H_{jk} = m(\,\Omega_{j\ell}x_\ell x_k - \Omega_{k\ell}x_\ell x_j\,)$ となるので，

$$H = m(\Omega\,\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\otimes\Omega) \tag{3.1.83}$$

と表すこともできる．

- エミリー：ナルホドねぇ〜．角速度には角速度テンソルが，角運動量には角運動量テンソルが … 軸性ベクトルには 2 階反対称テンソルが付随しているということね．

3.1.4 商法則

- K氏：§ 5.1 テンソルの座標変換のところで勉強したけど，u_i, v_i がそれぞれベクトルの成分であったとき，$u_iv_j\,(i,j=1,2,3)$ は 2 階テンソル ($T_{ij}=u_iv_j$) となったね．さて，ある未知の量があり，それと任意のテンソルの積がテンソルであるとき、その未知の量はテンソルである，というのが商法則と呼ばれるものだ．もっとも積が 0 の場合には商法則は必ずしも適用されないけど．

- エミリー：え〜っと，先ほどの $T_{ij}=u_iv_j$ でいえば，T_{ij} が 2 階テンソルとして既知で，u_i を未知の量，v_i を 1 階のテンソル（ベクトル）とすると u_i は 1 階のテンソルになるということなの．

- K氏：そうだね．割り算の“ 商 ”のようなイメージだろう．商法則という名の由来はその辺からきていると思うんだけど，それは兎も角として次の等式を考えよう．

$$B_{jk} = X_{ijk}A_i \tag{3.1.84}$$

ここで X は未知の量とし，これとテンソル A_i の積をとった B_{jk} が 2 階テンソルとなったしよう．いまの場合，A_i はベクトル，つまり 1 階のテンソルだけど，A は任意のテンソルでいい．ハテ，未知の量は何か？それを判定するには Σ,Σ' 座標変換性を調べればよい．(3.1.84) を考えよう．X_{ijk} は未知の量で A_i はベクトル，B_{jk} は 2 階テンソルだ．プライムの付いた座標系において

$$B'_{jk} = X'_{ijk}A'_i \tag{3.1.85}$$

が成立する．B_{jk} は 2 階テンソルなので，変換公式を使えば

$$\begin{aligned} B'_{jk} = X'_{ijk}A'_i &= a_{jp}a_{kq}B_{pq} = a_{jp}a_{kq}X_{rpq}A_r \\ \therefore\quad X'_{ijk}A'_i &= a_{jp}a_{kq}X_{rpq}A_r \end{aligned} \tag{3.1.86}$$

またベクトル A_i は

$$A_r = a_{ir}A'_i$$

と変換されるので，これを上の式に入れて整理すると

$$(X'_{ijk} - a_{ir}a_{jp}a_{kq}X_{rpq})A'_i = 0$$

A'_i は任意なので

$$X'_{ijk} = a_{ir}a_{jp}a_{kq}X_{rpq} \tag{3.1.87}$$

これは 3 階テンソルの変換則に他ならない．つまり未知の量は 3 階テンソルであることが分かる．

- エミリー：ナルホド．そういえば，§5.1 の最後のところで，右辺の添え字で同じものを消去して残った添え字は左辺の添え字になり，左辺はその数の階数テンソルになるといった話があったけど，それは商の法則で保障されるというわけね．ところで先ほど，積が 0 の場合は商法則が適用されないといわれたけど，もし B_{jk} が 0 ならその変換性は不定なので，結局うまく判定できなくなるというわけね．

- K氏：そうだね．さて，最後に等方テンソルの話をして第 3 話を終わることにしよう．

3.2 等方テンソル

3.2.1 2 階等方テンソル

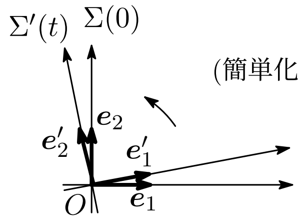
- K氏：テンソル成分は直交座標変換で変わるだろう．例えば 2 階テンソル T_{ij} を考えてみよう．Σ 系から Σ' 系へ変換すると，Σ' 系でのテンソルの成分 T'_{ij} は次式で与えられるように Σ 系でのテンソル成分 T_{ij} とは異なる値となるだろう．

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{kl} \tag{3.2.1}$$

  等方テンソルというのは座標変換に対して成分の値が変わらないテンソルのことをいうんだね．例えばある物理量がテンソル量として表される場合を考えてみよう．物体が等方的な性質を持ったものであれば，物理量は方向によって変わらないので，そのテンソルの成分は座標軸の選び方によらず一定の値を持つはずだね，

- エミリー：確かにね．スカラー量は座標変換しても変わらない量なのでこれは 0 階の等方テンソル．ベクトルの場合，平面座標に矢印を書いてみればすぐ分かるけど回転座標系から見ればベクトル成分は変化する．だから大きさを持ったベクトルは等方的でない．ただ，ゼロベクトルは等方的ね．ということで 1 階の等方テンソルはゼロベクトルだけになる，ということね．

- K氏：そうだね．それでは等方テンソルの満たすべき方程式を求めていくことにしよう．



(簡単化して 2 次元でのイメージ)

  テンソル成分が座標変換で不変ということは，言い換えると座標回転で成分の値が変わらないということ．一般に有限の回転は無限小回転の積み重ねで表されるので，無限小回転での性質を調べれば十分というううまい理屈があるので，それを活用しよう．いま，1 つのパラメータ t に従って変化する直交基底を $\Sigma'(t)$ としよう．$t = 0$ のとき $\Sigma = \Sigma'(0)$ とする．t の増加とともに Σ' 系は原点を中心に回転していく．直交行列を $A(t) = (a_{ij}(t))$ とすると直交行列の性質から

$$a_{ij}(t)a_{ik}(t) = \delta_{jk} \tag{3.2.2}$$

  また，$t = 0$ では $\Sigma = \Sigma'(0)$ なので

$$a_{ij}(0) = \delta_{ij} \tag{3.2.3}$$

(3.2.2) を t で微分して $t=0$ とおくと

$$\dot{a}_{ij}(0)a_{ik}(0)+a_{ij}(0)\dot{a}_{ik}(0)=\dot{a}_{ij}(0)\delta_{ik}+\delta_{ij}\dot{a}_{ik}(0)=\dot{a}_{kj}(0)+\dot{a}_{jk}(0)=\mathbf{0} \tag{3.2.4}$$

となるね．$\mathbf{0}$ はゼロ行列だ．ここで

$$\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{t=0}=\dot{a}_{ij}(0)=\omega_{ij} \tag{3.2.5}$$

とおくと，(3.2.4) より

$$\omega_{kj}+\omega_{jk}=\mathbf{0}, \quad \therefore \quad \omega_{kj}=-\omega_{jk} \tag{3.2.6}$$

が得られる．(3.2.5) を無限小回転という．これは $t=0$ からほんの僅か（無限小）の t 経過したときの回転ということだね．(3.2.6) より無限小回転 ω_{ij} は交代行列であることが分かる．交代行列の対角成分は 0 だね．

さて，T_{ij} を 2 階等方テンソルとすると，その成分は t に独立で $T'_{ij}=T_{ij}=$ 定数 なので，(3.2.1) を t で微分して $t=0$ とおくと

$$\dot{a}_{ik}(0)a_{j\ell}(0)T_{k\ell}+a_{ik}(0)\dot{a}_{j\ell}(0)T_{k\ell}=\omega_{ik}\delta_{j\ell}T_{k\ell}+\delta_{ik}\omega_{j\ell}T_{k\ell}=0$$

これから

$$\omega_{ik}T_{kj}+\omega_{j\ell}T_{i\ell}=0 \tag{3.2.7}$$

が得られる．これが 2 階等方テンソルの満たす代数方程式だ．具体的にテンソル成分を求めていこう．(3.2.7) で $i=1, j=2$ とおき，交代行列の対角成分は 0 であるので

$$(\omega_{12}T_{22}+\omega_{13}T_{32})+(\omega_{21}T_{11}+\omega_{23}T_{13})=0$$

が得られる．また，$\omega_{ij}=-\omega_{ji}$ なので，上式を整理すると

$$\omega_{12}(T_{22}-T_{11})-\omega_{31}T_{32}+\omega_{23}T_{13}=0$$

交代行列の 3 個の独立成分 $\omega_{12}, \omega_{31}, \omega_{23}$ は任意に選べるので，上式が恒等式として成り立つためには

$$T_{11}=T_{22}, \quad T_{32}=0, \quad T_{13}=0$$

でなければばならない．次に $i=2, j=3$ とおいて同様の計算をすると

$$T_{11}=T_{22}=T_{33}, \quad T_{ij}=0 \ (i\neq j)$$

が得られる．テンソルのスタイルを見ると対角成分は同じ値で非対角成分はすべて 0 という形だね．従って $T_{11}=\alpha$（α：スカラー）とおくと，求める 2 階等方テンソルは

$$T_{ij}=\alpha\delta_{ij}=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix} \qquad \left(\alpha=\frac{1}{3}T_{ii}\right) \tag{3.2.8}$$

という式であらわされる．

- エミリー：なるほど，2 階等方テンソルは $T_{ij}=\alpha\delta_{ij}$ という形のものに限られるというわけね．

3.2.2　高階等方テンソル

- K氏：詳しい議論は省略するけど 3 階等方テンソルは次の代数方程式を満たすんだ．

$$\omega_{ik}T_{kj\ell}+\omega_{jm}T_{im\ell}+\omega_{\ell n}T_{ijn}=0 \tag{3.2.9}$$

この方程式を満足させる 3 階等方テンソルは

$$T_{ijk}=\alpha\varepsilon_{ijk} \tag{3.2.10}$$

で表される．この計算は 2 階の場合と同じようにできるのでチェックしておいて頂戴．なお ε_{ijk} は擬テンソルだったので α はただのスカラーでなく，空間反転で符号を変える擬スカラーになる．

次に，4 階等方テンソルの満たすべき代数方程式は

$$\omega_{im}T_{mjk\ell}+\omega_{jm}T_{imk\ell}+\omega_{km}T_{ijm\ell}+\omega_{\ell m}T_{ikjm}=0 \tag{3.2.11}$$

で，4 階等方テンソルは

$$T_{ijk\ell}=\alpha\delta_{ij}\delta_{k\ell}+\beta\delta_{ik}\delta_{j\ell}+\gamma\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\quad(\alpha,\beta,\gamma:\text{スカラー}) \tag{3.2.12}$$

で表される．これが対称性

$$T_{ijk\ell}=T_{jik\ell},\quad T_{ijk\ell}=T_{k\ell ij}$$

を持っていれば

$$T_{ijk\ell}=\alpha(\delta_{ik}\delta_{j\ell}+\delta_{i\ell}\delta_{jk})+\beta\delta_{ij}\delta_{k\ell}\quad(\alpha,\beta:\text{スカラー}) \tag{3.2.13}$$

という形で表される．等方性弾性体の弾性テンソル (3.1.41) も同じ式で表されたね．また，反対称性

$$T_{ijk\ell}=-T_{jik\ell},\quad T_{ijk\ell}=-T_{ij\ell k} \tag{3.2.14}$$

を持てば

$$T_{ijk\ell}=\gamma(\delta_{i\ell}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{j\ell}) \tag{3.2.15}$$

という形で表される．

■等方テンソルの形は限定されている

- エミリー：等方テンソルを整理しておくと，等方テンソルは次の形に限られるということね．

$$\begin{cases} 2\text{ 階等方テンソル} & : \quad T_{ij}=\alpha\delta_{ij}\quad(\alpha:\text{スカラー}) \\ 3\text{ 階等方テンソル} & : \quad T_{ijk}=\alpha\varepsilon_{ijk}\quad(\alpha:\text{擬スカラー}) \\ 4\text{ 階等方テンソル} & : \quad T_{ijk\ell}=\alpha\delta_{ij}\delta_{k\ell}+\beta\delta_{ik}\delta_{j\ell}+\gamma\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\quad(\alpha,\beta,\gamma:\text{スカラー}) \end{cases} \tag{3.2.16}$$

- K氏：そうだね．なお，一般的に次のことが成り立つことが知られているんだ．

『偶数階の等方テンソルは $\alpha\delta_{ij}\delta_{k\ell}\cdots\delta_{st}$ の項の和として表され，奇数階の等方テンソルは $\alpha\varepsilon_{ijk}\delta_{\ell m}\delta_{no}\cdots\delta_{st}$ の形の項の和として表される．ただし，添え字としては $(i,j,\cdots,s,t)$ を任意に並び替えたものをとればよい.』

さて，以上で第 3 話を終了しよう．第 4 話は 2 階テンソルの対角化ということを中心に話を進めていく予定だ．それではまた〜．